

Problème du Cercle de Mathématiques et Physique 2023

Deux problèmes en guise de hors-d'œuvre

Problème 1 :

Trouvez trois nombres tels que leur somme est un carré et que la somme de chaque paire de nombres est aussi un carré.

Problème 2 :

Vingt hommes, femmes et enfants reçoivent en tout vingt pièces. Chaque homme reçoit trois pièces, chaque femme une pièce et demie et chaque enfant une demi-pièce. Combien y a-t-il d'hommes, de femmes et d'enfants ?

Plat de résistance : Le problème 2023 du CMP

Les nombres d'Einstein

Soit a et b deux entiers relatifs, on note $q(a; b)$ le nombre $a^2 + ab + b^2$.

On dit qu'un nombre entier n est un nombre d'Eisenstein s'il existe des entiers relatifs a et b tels que $n = q(a; b)$.

Les nombres d'Eisenstein ont été étudiés par le mathématicien allemand Gotthold Eisenstein (1823-1852). Cherchons certaines propriétés.

1. Calculer $q(0; 0)$; $q(0; 1)$; $q(0; 2)$; $q(1; 1)$; $q(1; 2)$; $q(-1; 1)$ et $q(-1; 2)$.
2. Montrer que 49 et 91 sont des nombres d'Eisenstein.
3. Montrer que si m est un entier, alors m^2 et $3m^2$ sont des nombres d'Eisenstein.
4. Montrer que si n est un nombre d'Eisenstein, alors $4n$ est aussi un nombre d'Eisenstein.
5. Vérifier l'égalité $a^2 + ab + b^2 = \frac{(2a+b)^2 + 3b^2}{4}$. En déduire que tous les nombres d'Eisenstein sont positifs. Montrer que 2 n'est pas un nombre d'Eisenstein.

Adresser votre réponse à :

Pierre-Olivier Vallat, Rue du Temple 24, 2735 Bévillard
pov@povallat.net