

Problème du Cercle de Mathématiques et Physique 2025

La tête aux carrés

Soit n un entier naturel, on dit que n est « décomposable en somme de carrés » s'il est égal à une somme de carrés d'entiers naturels. Par exemple 0, 10 et 33 admettent pour décompositions en carrés : $0 = 0^2$, $10 = 3^2 + 1^2$ et $33 = 5^2 + 2^2 + 2^2$.

1. Écrire une décomposition en somme de carrés de chacun des nombres 5 et 22 ?
2. Ces décompositions sont-elles les seules sommes de carrés égales à 5 ou à 22 ?
3. Tout entier naturel non nul est-il décomposable en somme de carrés ?

On s'intéresse maintenant aux entiers naturels n décomposables en somme de deux carrés, c'est-à-dire pour lesquels il existe deux entiers naturels a et b tels que $n = a^2 + b^2$. On appelle ces entiers naturels des « nombres bicarrés ».

Par exemple, 1, 18 et 1402 sont des nombres bicarrés, car $1 = 1^2 + 0^2$, $18 = 3^2 + 3^2$, $1402 = 31^2 + 21^2$.

4. Le nombre 58 est-il un nombre bicarré ?
5. Le nombre 21 est-il un nombre bicarré ?
6. Y a-t-il une infinité de nombres bicarrés ?

Dans cette partie, on s'intéresse au produit de deux nombres bicarrés.

7. Commencer par montrer l'égalité de Lagrange, valable pour tous nombres a, b, c et d tels que :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$$

8. Calculer une décomposition en somme de deux carrés de 18×58 .
9. En déduire une décomposition en somme de deux carrés du double d'un nombre bicarré.
10. Montrer que la moitié d'un nombre pair bicarré est un nombre bicarré.
11. 1344 est-il un nombre bicarré ?
12. Existe-t-il une infinité de nombres pairs bicarrés ?
13. Existe-t-il une infinité de nombres pairs qui ne sont pas bicarrés ?

La tête aux carrés : avec aux plus quatre carrés pour les programmeuses et programmeurs

Dans cette partie on s'intéresse aux entiers naturels décomposables en sommes de carrés pour lesquels il existe une décomposition en somme de quatre carrés. Par exemple $43 = 5^2 + 4^2 + 1^2 + 1^2$ et $42 = 5^2 + 4^2 + 1^2 + 0^2$.

Joseph Louis Lagrange démontra, en 1770, que tout nombre entier naturel est décomposable en quatre carrés.

14. Écrire un algorithme fournissant une décomposition en quatre carrés d'un entier n .