Problèmes 2024

Paul Jolissaint

Solution du problème 1 Notons c_n le nombre d'entiers (= cases unité) sur un côté du n^e anneau $\mathcal{A}_n$, de sorte que $c_0 = 1$, $c_1 = 3$, et en général $c_{n+1} = c_n + 2$. Il s'agit de la suite arithmétique $c_n = 2n + 1$.
Notons a_n l'aire du n^e carré et b_n le nombre d'éléments de $\mathcal{A}_n$. On a $a_n = (2n + 1)^2$ par ce qui précède, et

$$b_n = a_n - a_{n-1} = (2n + 1)^2 - (2(n - 1) + 1)^2 = (2n + 1)^2 - (2n - 1)^2 = 8n.$$

1. La formule précédente répond à la première question. On peut également calculer b_n ainsi : $b_n = 4c_n - 4 = 8n$ car dans $4c_n$, chaque coin est compté deux fois. Cela répond à la première question.
2. Si $u_n = 4n^2 + 12n + 7$, on a

$$u_0 = 7,\ u_1 = 23\ u_2 = 47,\ u_3 = 79,\ u_4 = 117 = 7 \cdot 17,\ u_5 = 167.$$

   Dans cette liste, seul u_4 n'est pas premier.
   La suite $u_0 = 1, u_1 = 9, u_2 = 25, \ldots$ est formée à l'aide des derniers nombres qui constituent l'anneau $\mathcal{A}_n$; comme le carré d'aire a_n, on a $u_n = (2n + 1)^2$.
   Enfin, pour la suite $u_0 = 4, u_1 = 16, u_2 = 36, \ldots$, sachant qu'elle est de la forme $u_n = an^2 + bn + c$, en prenant $n = 0$, on obtient immédiatement $c = 4$, puis $n = 1$ donne $a + b + 4 = 16$, donc $a + b = 12$, et enfin $n = 2$ donne $4a + 2b + 4 = 36$ c'est-à-dire $2a + b = 16$. Aini, on obtient le système

$$\begin{cases} a + b &= 12 \\ 2a + b &= 16 \end{cases}$$

   En soustrayant la première de la seconde, on obtient $a = 4$ puis $b = 8$. Finalement, $u_n = 4n^2 + 8n + 4$.
3. Pour trouver le nombre n tel que 2024 se trouve sur l'anneau $\mathcal{A}_n$, on pose la condition : $(2n - 1)^2 < 2024 < (2n + 1)^2$ (les inégalités sont strictes car 2024 est pair et $(2n \pm 1)^2$ sont impairs). On trouve $n = 22$ qui correspond à $1849 < 2024 < 2025 = 45^2$. Ainsi, 2024 se trouve juste à gauche du coin inférieur droit de $\mathcal{A}_{22}$.

Des nombres en spirale

Pierre Charpié

①

Anneau 0	1 nombre	1	
Anneau 1	8 nombres	2 ... 9	
Anneau 2	16 nombres	10 ... 25	
Anneau 3	24 nombres	26 ... 49	
Anneau 4	32 nombres	50 ... 81	
Anneau 5	40 nombres	82 ... 121	
Anneau 6	48 nombre	122 ... 169	
⋮			
Anneau n	8n nombres	$4n^2-4n+2 \ldots 4n^2+4n+1$	

② • Diagonale 1

$$U_n = 4n^2 + 12n + 7 = (2n+3)^2 - 2$$

n	U_n	
0	7	tous des nombres premiers
1	23	
2	47	
3	79	
4	119	
5	167	
6	223	
7	287	$= 41 \times 7$
8	359	tous des nombres premiers
9	439	
10	527	

- Diagonale 2

$$u_0 = 1$$
$$u_1 = 9$$
$$u_2 = 25$$
$$u_3 = 49$$
$$u_4 = 81$$
$$\ldots$$
$$u_n = (2n+1)^2$$

- Diagonale 3

$$u_0 = 4$$
$$u_1 = 16$$
$$u_2 = 36$$
$$u_3 = 64$$
$$\ldots$$
$$u_n = 4\left[(n+1)^2\right] = 4n^2 + 8n + 4$$

$$\boxed{a = 4 \,,\ b = 8 \,,\ c = 4}$$

(3) Si on continue la liste de la question (1) on voit que l'anneau 22 contient les nombres 1850 à 2025

C'est donc l'anneau 22 qui contient le nombre 2024

Le problème du facteur

(1) Partie où $n=5$

- $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$
  2 2 1 2 1 Somme = 8

- $1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$
  3 2 3 2 2 Somme = 12

- $4! = 24$ permutations possible des nombres 2 3 4 5

- La longueur minimale est 8

-

1	2	3	4	5	1
1	2	3	5	4	1
1	2	4	5	3	1
1	2	5	4	3	1
1	3	4	5	2	1
1	3	5	4	2	1
1	4	5	3	2	1
1	5	4	3	2	1

8 trajets de longueur minimale

(2) Partie avec n entier quelconque > 2

- il y a $(n-1)!$ trajets possibles

- La distance entre la première et la n-ième maison est $(n-1)$
  Aller/retour $= 2(n-1)$

- Exemple avec $n = 6$

1	2	3	4	5	$\boxed{6}$	1	1
1	2	3	4	$\boxed{6}$	5	1	
1	2	3	5	$\boxed{6}$	4	1	
1	2	4	5	$\boxed{6}$	3	1	4
1	3	4	5	$\boxed{6}$	2	1	
1	2	3	$\boxed{6}$	5	4	1	
1	2	4	$\boxed{6}$	5	3	1	
1	2	5	$\boxed{6}$	4	3	1	6
1	3	4	$\boxed{6}$	5	2	1	
1	3	5	$\boxed{6}$	4	2	1	
1	4	5	$\boxed{6}$	3	2	1	
1	2	$\boxed{6}$	5	4	3	1	
1	3	$\boxed{6}$	5	4	2	1	4
1	4	$\boxed{6}$	5	3	2	1	
1	5	$\boxed{6}$	4	3	2	1	
1	$\boxed{6}$	5	4	3	2	1	1

Avec l'exemple précédent ($n = 5$)
si le connait les coefficients binomiaux

1	1
1 1	2
1 2 1	4
1 3 3 1	8
1 4 6 4 1	16

⇒ Il y a $2^{(n-2)}$ trajets minimaux

③ Partie avec longueur maximale

- $n = 4$ $\quad 1 \; 4 \; 2 \; 3 \; 1 \quad \ell = 8$

  $\quad 1 \; 3 \; 2 \; 4 \; 1 \quad \ell = 8$

- $n = 5$ $\quad \begin{array}{ccccccccccc} 1 & & 5 & & 2 & & 4 & & 3 & & 1 \\ & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & 2 & \end{array} \quad \ell = 12$

- $n = 6$ $\quad \begin{array}{ccccccccccccc} 1 & & 6 & & 2 & & 5 & & 3 & & 4 & & 1 \\ & 5 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & 3 & \end{array} \quad \ell = 18$

$n = 7$ $\quad \begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & & 7 & & 2 & & 6 & & 3 & & 5 & & 4 & & 1 \\ & 6 & & 5 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & 3 & \end{array} \quad \ell = 24$

IMPAIR $\quad n = 9 \quad 1 \; 9 \; 2 \; 8 \; 3 \; 7 \; 4 \; 6 \; 5 \; 1$

$$\underbrace{8 \; 7 \; 6 \; 5 \; 4 \; 3 \; 2 \; 1}_{\frac{(n-1)n}{2}} \; + \; \underbrace{4}_{\frac{n-1}{2}} = \boxed{\frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}}$$

PAIR $\quad n = 10 \quad 1 \; 10 \; 2 \; 9 \; 3 \; 8 \; 4 \; 7 \; 5 \; 6 \; 1$

$$\underbrace{9 \; 8 \; 7 \; 6 \; 5 \; 4 \; 3 \; 2 \; 1}_{\frac{(n-1)n}{2}} \; + \; \underbrace{5}_{\frac{n}{2}} = \boxed{\frac{n^2}{2}}$$